

Раздел VI. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Глава 5. Функция плотности квантовых состояний. Переход к классической статистике.

1. Статистический смысл функции плотности квантовых состояний.

Если газ тождественных частиц близок к идеальному (частицы можно считать свободными), то используют понятия квантового состояния и энергии для одной частицы. Если спектр квантовых состояний частицы близок к непрерывному, то вводят функцию плотности квантовых состояний $g(E)$ такую, что число квантовых состояний в интервале энергий $E \div E+dE$ равно:

$$dG(E) = g(E)dE$$

Тогда число частиц с энергиями в интервале $E \div E+dE$ будет равно:

$$dN(E) = \langle n(E) \rangle g(E)dE$$

Где $\langle n(E) \rangle$ - среднее число частиц в квантовом состоянии с энергией E (распределения Ферми – Дирака или Бозе – Эйнштейна).

Средние значения физических величин F для частицы вычисляются по формуле:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \int F(E) \langle n(E) \rangle g(E)dE$$

Где N - полное число частиц в газе.

Химический потенциал находится из условия:

$$\int \langle n(E) \rangle g(E)dE = N$$

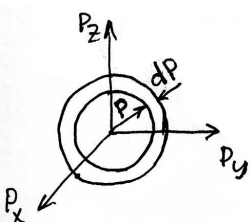
Интегрирование ведется по всем возможным значениям энергии

2. Функции плотности квантовых состояний для различных систем тождественных частиц.

В квазиклассическом приближении доказывается, что на каждое квантовое состояние без учета спина частицы в 6-мерном фазовом пространстве координат и импульсов приходится элементарный объем, равный h^3 :

$$\Delta\Gamma = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = h^3$$

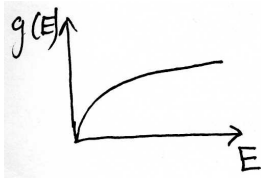
Тогда число квантовых состояний, без учета спина для частицы, заключенной в объеме V , в интервале импульсов $p \div p+dp$:



$$dG(p) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

Используя ту, либо иную связь энергии и импульса $E(p)$, а также учитывая число проекций спина можно получить следующие функции плотности квантовых состояний:

а) Газ электронов, $E = \frac{p^2}{2m}$, спин $S=1/2$, число проекций спина 2.



$$g(E) = \frac{V 4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E}$$

б) Газ фотонов, $\hbar\omega = pc$, спин $S=1$, число проекций спина 2 (продольные электромагнитные волны не существуют)



$$g(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3}$$

в) Газ фононов, $p = \hbar k = \hbar \frac{\omega}{V_\phi}$,

число мод 3 (2 поперечных, 1 продольный),
 V_ϕ – фазовая скорость волн упругости.

$$g(\omega) = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 V_\phi^3}$$

3. Переход к классической статистике.

Квантовая статистика переходит в классическую, если в распределениях Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна можно пренебречь 1 в знаменателе:

$$\langle n(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} \approx e^{\frac{\mu-E}{kT}}$$

Это оправдано, если $e^{\frac{\mu}{kT}} \gg 1$.

Тогда распределение частиц по энергиям описывается функцией :

$$f(E) = \frac{1}{N} \langle n(E) \rangle g_0(E) = \frac{V}{N} \frac{2\pi (2m)^{3/2} \sqrt{E}}{h^3} e^{\frac{\mu-E}{kT}}$$

где без учета спина $g_0(E) = \frac{V 2\pi (2m)^{3/2} \sqrt{E}}{h^3}$

Химический потенциал μ определяется из условия

$$\int_0^\infty f(E) dE = 1 \Rightarrow$$

$$e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

После подстановки μ в $f(E)$ получается функция распределения Максвелла по энергиям:

$$f(E) = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}}$$

Условие $e^{\frac{\mu}{kT}} \gg 1$ выполняется, если $\frac{1}{n} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \gg 1$

Если $n = \frac{N}{V}$ - концентрация частиц в газе.

Последнее условие не что иное, как условие классичности:

$$\frac{\langle r \rangle}{\lambda} \gg \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ где } \langle r \rangle = \frac{1}{n^{1/3}} - \text{среднее расстояние между}$$

частицами.

$$\lambda = \frac{h}{mV} \approx \frac{h}{m\sqrt{\frac{kT}{m}}} - \text{длина волны де Бройля}$$

Вопросы:

1. Что такое функция плотности квантовых состояний?
2. Как вычислить средние значения физических величин в квантовом газе.
3. Как вычислить химический потенциал?
4. Когда квантовая статистика переходит в классическую?